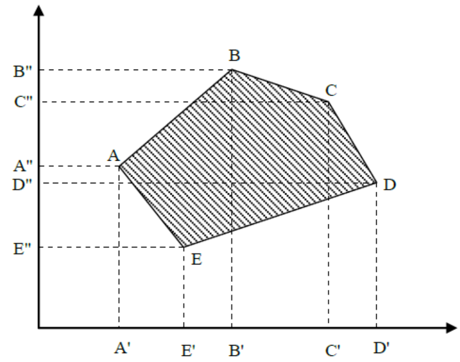
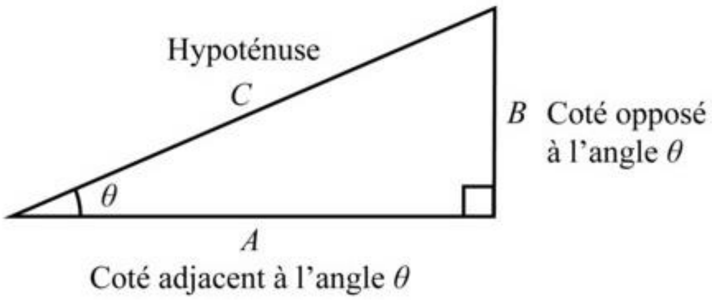
Résolution d'un triangle rectangle



Pourquoi ? Car toute figure dans le plan peut être décomposée en triangles rectangle. La résolution de proche en proche de ces triangles permet de résoudre ladite figure.

Formules usuelles :



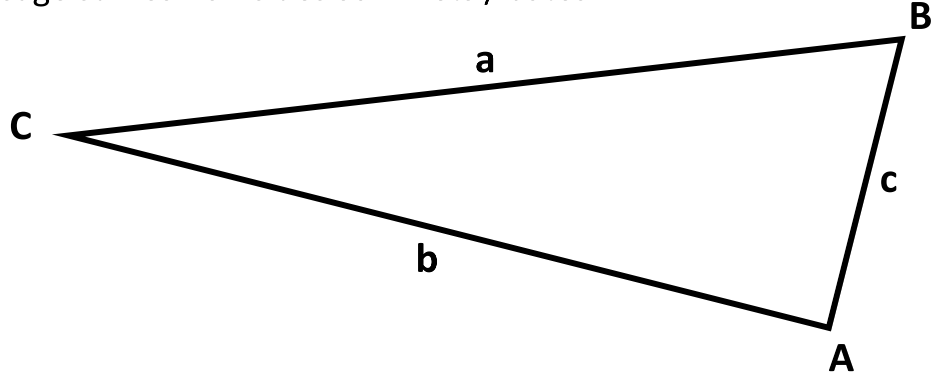
$$\text{Sinus :}\quad \sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{Arcsinus :}\quad \theta = \arcsin\left(\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}\right)$$

$$\text{Cosinus :}\quad \cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{Arccosinus :}\quad \theta = \arccos\left(\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}\right)$$

$$\text{Tangente :}\quad \tan(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \qquad \text{Arctangente :}\quad \theta = \arctan\left(\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}\right)$$

$$\text{Théorème de Pythagore : } C^2 = A^2 + B^2$$

Notation d'usage sur les noms des sommets / côtés :



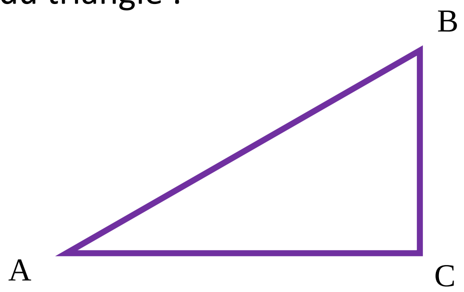
Que signifie « résoudre » le triangle

A l'issue de cette résolution on peut donner les 3 angles, les 3 côtés ainsi que la surface du triangle.

Exercice n°1 :

Sommets *(gon)*		**Côtés** *(m)*	
A =	40,9666	a =	3,000
B =	59,0334	b =	4,000
C =	100,000	c =	5,000
		Surface =	6,00

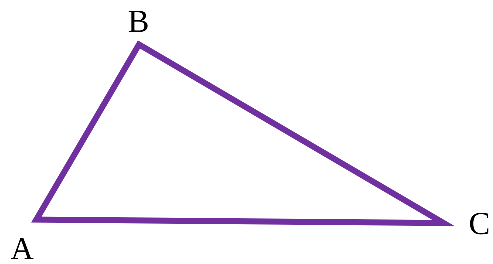
Croquis du triangle :



Exercice n°2 :

Sommets *(gon)*		**Côtés** *(m)*	
A =	60,000	a =	45,000
B =	100,000	b =	55,6231
C =	40,0000	c =	32,6944
		Surface =	735,62

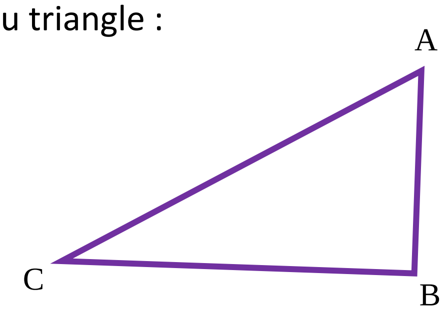
Croquis du triangle :



Exercice n°3 :

Sommets *(gon)*		**Côtés** *(m)*	
A =	44,5117	a =	54,326
B =	100,0000	b =	84,410
C =	55,4880	c =	64,605
		Surface =	1754,87

Croquis du triangle :



Exercice n°4 :

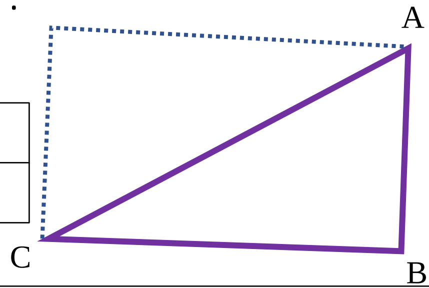
Sommets *(gon)*		**Côtés** *(m)*	
A =	33,333	a =	41,8050
B =	100,000	b =	83,6107
C =	66,667	c =	72,4092
		Surface =	1513,531

Croquis du triangle :

S = (1/2) * a * c

a = b * Cos(66,667)

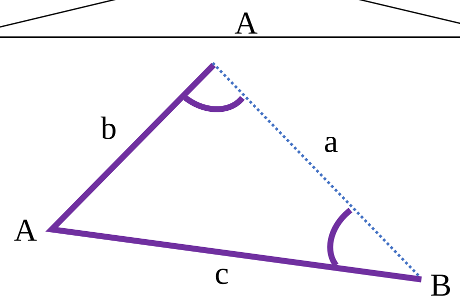
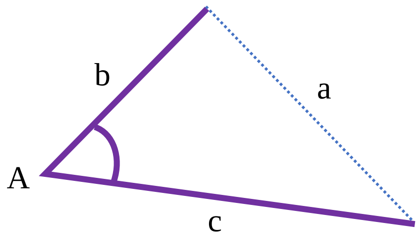
c = b * Sin(66,667)



(1/2) * b² * Cos(33,333) * Cos(66,667) = 1513,531

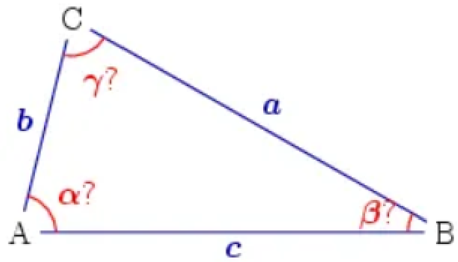
b² = 1513,531 / ((1/2) * Cos(33,333) * Cos(66,667))

Cas généralisé aux triangles quelconques

Formule	Schéma
Règle des sinus : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$	
$a = c\,.\cos\hat{B} \;+\; b\,.\cos\hat{C}$	
$a^2 \;=\; b^2 + c^2 \;-2\,.c.b.\cos\hat{A}$	

➔ Si les côtés sont connus :

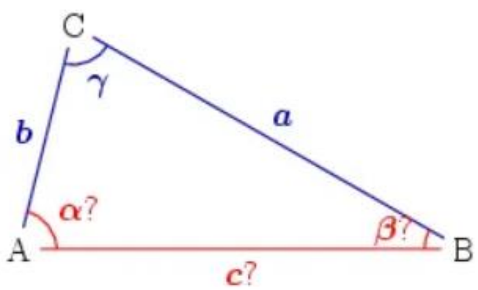
Attention !
π = 200 gon



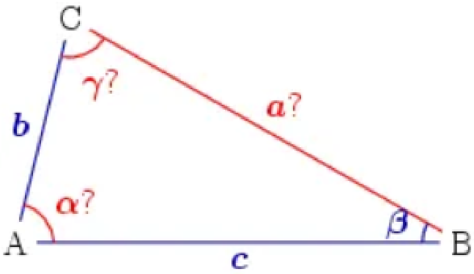
- $\alpha = \arccos\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$
- $\beta = \arccos\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$
- $\gamma = \arccos\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, avec $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

➔ On a un angle et les deux côtés

- $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$
- $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2} + \arctan\left(\dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{\gamma}{2}\right)$
- $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2} - \arctan\left(\dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{\gamma}{2}\right)$
- $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$



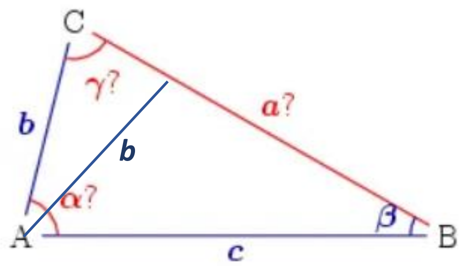
➔ Un angle, le côté opposé et un côté adjacent (Attention 2 solutions possible)



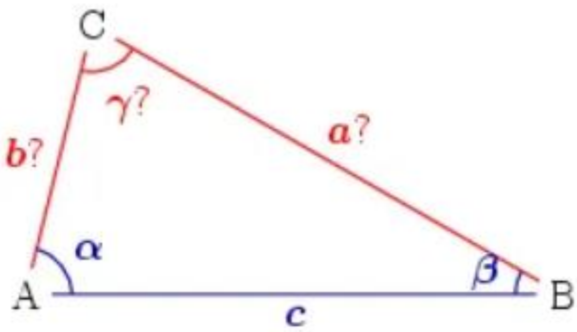
- $\gamma = \arcsin\left(\frac{c\sin\beta}{b}\right)$
- $\alpha = \pi - \beta - \arcsin\left(\frac{c\sin\beta}{b}\right)$
- $a = \sqrt{b^2 - c^2\sin^2\beta} + c\cos\beta$
- $S = \frac{1}{2}c\left(\sqrt{b^2 - c^2\sin^2\beta} + c\cos\beta\right)\sin\beta$

  - Si β est aigu *(β <100gon)* et que b < c, il existe une seconde solution :

- $\gamma = \pi - \arcsin\left(\frac{c\sin\beta}{b}\right)$
- $\alpha = -\beta + \arcsin\left(\frac{c\sin\beta}{b}\right)$
- $a = c\cos\beta - \sqrt{b^2 - c^2\sin^2\beta}$
- $S = \frac{1}{2}c\left(\sqrt{b^2 - c^2\sin^2\beta} - c\cos\beta\right)\sin\beta$



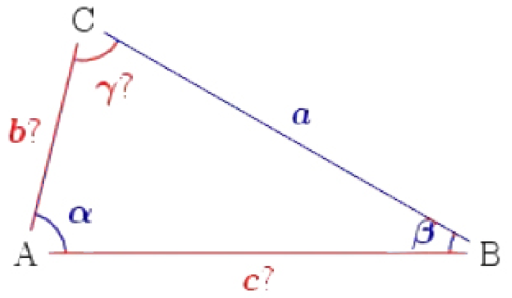
➔ Deux angles et le côté commun :



- $a = \dfrac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$
- $b = \dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$
- $\gamma = \pi - \alpha - \beta$
- $S = \dfrac{1}{2}c^2\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

➔ Deux angles et un côté non commun

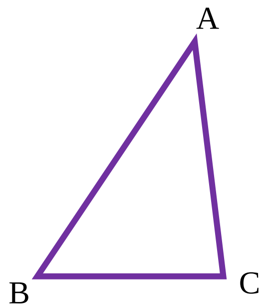
- $b = \dfrac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$
- $c = \dfrac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$
- $\gamma = \pi - \alpha - \beta$
- $S = \dfrac{1}{2} a^2 \dfrac{\sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{\sin \alpha}$



Exercice n°2-1 :

Sommets *(gon)*		**Côtés** *(m)*	
A =	40,8195	a =	3,000
B =	64,1805	b =	4,2423
C =	95,000	c =	5,000
		Surface =	6,34

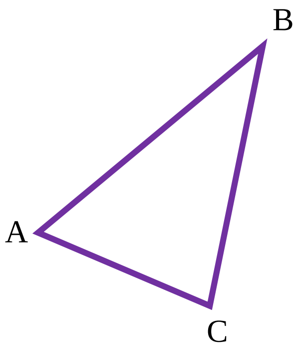
Croquis du triangle :



Exercice n°2-2 :

Sommets *(gon)*		**Côtés** *(m)*	
A =	60,000	a =	45,000
B =	43,3264	b =	35,000
C =	96,6736	c =	55,5471
		Surface =	786,43

Croquis du triangle :



Exercice n°2-3 :

Sommets *(gon)*		**Côtés** *(m)*	
A =	49,3503	a =	50,000
B =	63,4685	b =	60,000
C =	87,1812	c =	70,000
		Surface =	1469,69

Croquis du triangle :